UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
KATEDRA ZA AUTOMATIKU I UPRAVLJANJE SISTEMIMA

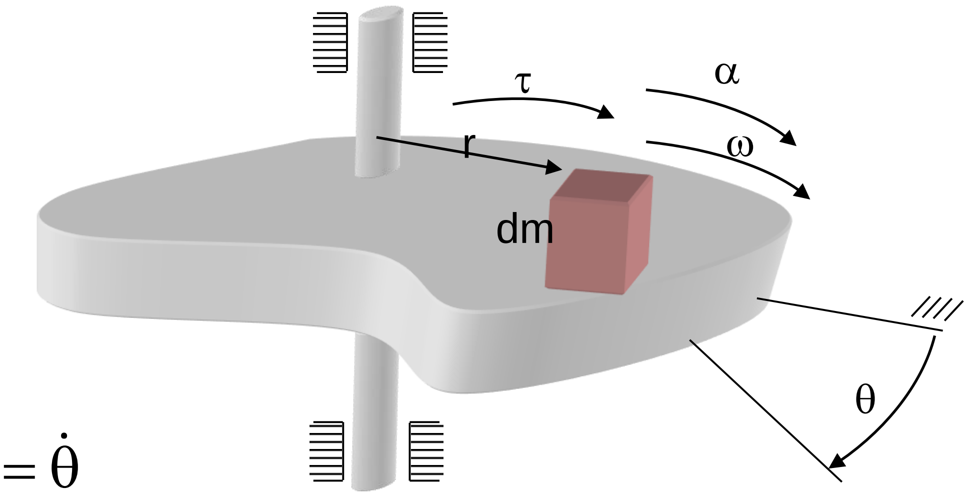
Rotacioni mehanički sistemi

Modeli fizičkih sistema

Modeliranje i simulacija sistema

Upravljanje, modelovanje i simulacija sistema

Promenljive od značaja



- θ – ugao [rad] $\omega = \dot{\theta}$
- ω – ugaona brzina [rad/s] $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$
- α – ugaono ubrzanje [rad/s^2]
- τ – moment sile [Nm]

- p – snaga rotirajućeg tela $p = \tau \cdot \omega$
- w – energija $w(t) = w(t_o) + \int_{t_0}^{t} p(t)dt$

Zakoni elemenata

- Moment inercije
- Trenje usled rotacije
- Elastičnost usled uvrtanja
- Poluga
- Zupčanici

Moment inercije

- Primena II Njutnovog zakona na delić mase *dm*:

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = \tau$$

Ako je J=*const*

$$J\dot{\omega} = \tau$$

J - moment inercije [kgm²]

Jω - moment količine kreatanja

τ - moment sile koji deluje na osu rotacije

d(Jω)/dt – inercijalni moment sile

Energija:

- kinetička

$$w_k = \frac{1}{2} J\omega^2$$

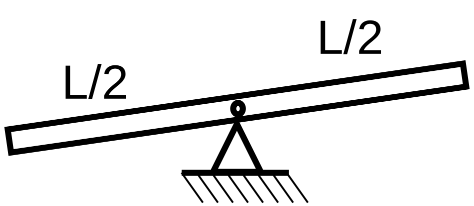
- potencijalna

$$w_p = mgh$$

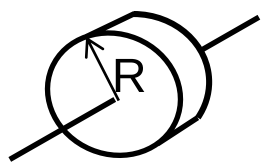
h-visina težišta u odnosu na ref. tačku.

w_p se ne menja kada telo rotira oko težišne ose.

- Primeri:



$$J = \frac{1}{12} mL^2$$

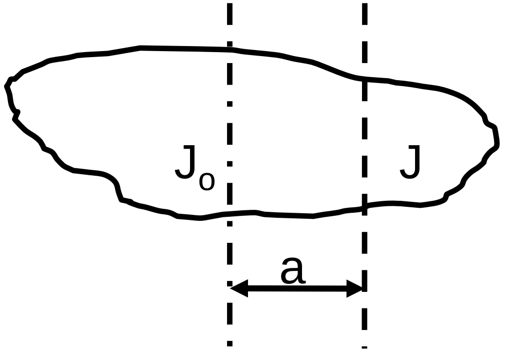


$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

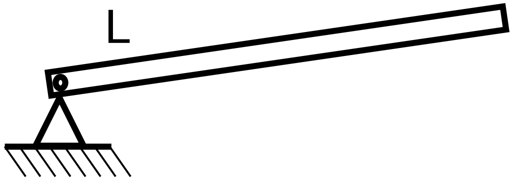
Moment inercije u odnosu na paralelne ose

- *Steiner*-ova teorema
  J_o - moment inercije za osu koja prolazi kroz centar mase (težišnu osu)
  J - moment inercije za osu paralelnu prethodnoj
  (a = rastojanje osa)

$$J = J_o + ma^2$$



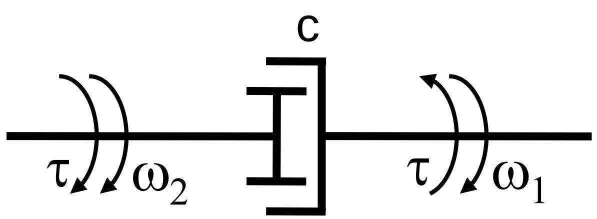
- Primer



$$J = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

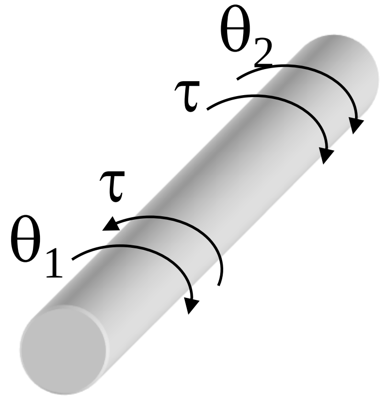
Trenje

- Rotaciono trenje – (trenje usled rotacije) je algebarska veza momenta sile i relativne ugaone brzine između dve površi
  – Opšta, nelinearna veza: $\tau = f(\Delta\omega)$
  – Linearna veza: $\tau = c \cdot \Delta\omega$ c – koeficijent trenja [Nms]
    - Gde je $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$



Rotaciona elastičnost

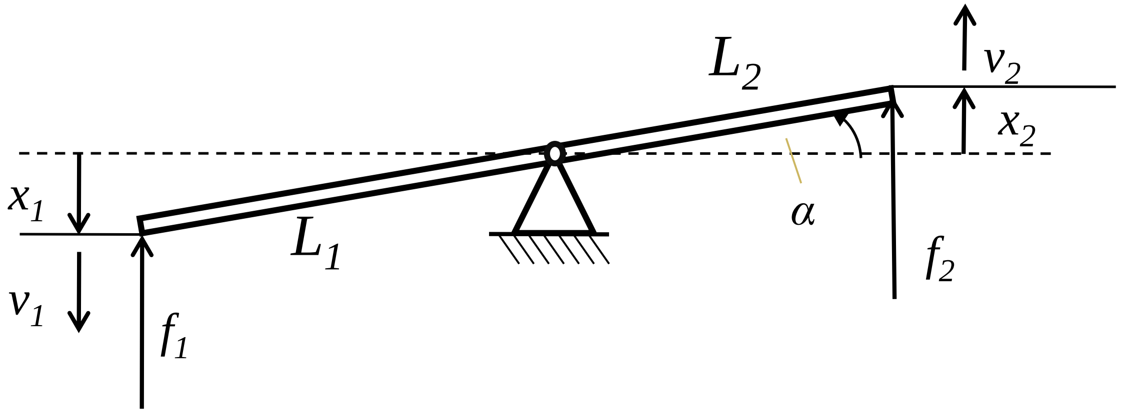
- obično se poistovećuje sa torzionom oprugom
- je algebarska veza momenta sile i relativnog ugaonog pomeraja
  - Opšta, nelinearna veza: $\tau = f(\Delta\theta)$
  - Linearna veza: $\tau = k \cdot \Delta\theta$ k – koeficijent elastičnosti [Nm]
    - Gde je $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$



- Potencijalna energija uvrnutog štapa: $W_p = \frac{1}{2} k (\Delta\theta)^2$

Poluga

- Idealna poluga ≡ čvrst štap sa tačkom oslonca
  nema masu, trenje, moment inercije, unutrašnju energiju
- Za male ugaone pomeraje (<0,25rad) kretanje krajeva se može posmatrati kao translatorno
  - Jer je $x_1 = L_1\alpha \quad x_2 = L_2\alpha$



- Na osnovu sličnosti trouglova važi

$$x_1 = \frac{L_1}{L_2} x_2 \qquad v_1 = \frac{L_1}{L_2} v_2$$

- Σ momenata oko obrtne tačke = 0 (kada je masa = 0)

$$L_1 f_1 - L_2 f_2 = 0$$

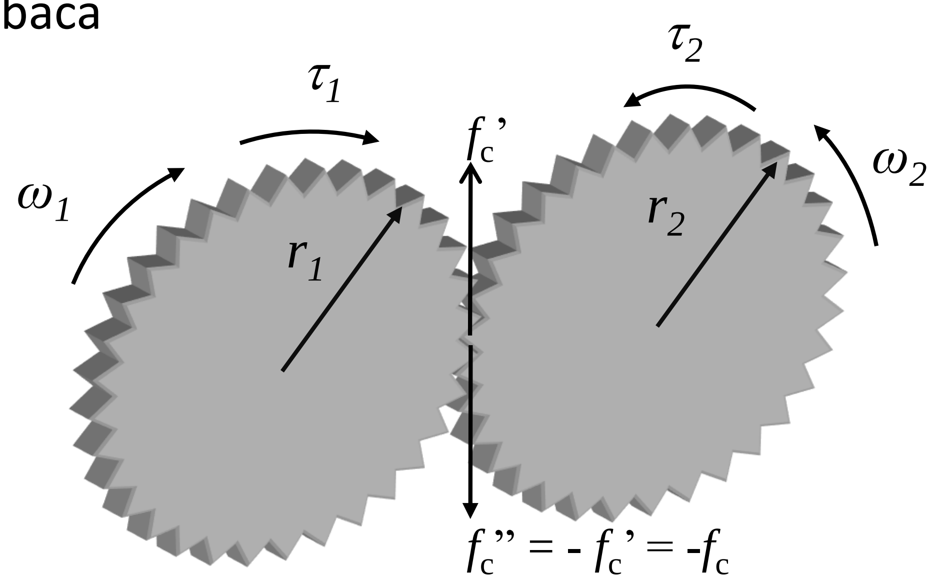
$$f_1 = \frac{L_2}{L_1} f_2$$

Zupčanici

- Idealni zupčanici - nemaju moment inercije, trenje, unutrašnju energiju i zubci im savršeno naležu.
  – Inercija i trenje se mogu predstaviti posebnim elementima
- Zupčasti prenos N - odnos broja zubaca
  – z_1, z_2 - broj zubaca

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} = N$$

$$N = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = N$$



- Prenošenje momenta sile:
  – Za levi zupčanik važi: $f_c \cdot r_1 - \tau_1 = 0$
  – Za desni zupčanik važi: $f_c \cdot r_2 + \tau_2 = 0$

  gde su: f_c- sila koja se prenosi na drugi zupčanik
  τ- moment sile primenjen na zub

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = -\frac{r_2}{r_1} = -N$$

Zakonitosti uzajamnog dejstva elemenata

1. ***D`Alambert*-ov zakon** – primenjen na telo konstantnog momenta inercije koja se okreće oko fiksne ose:

$$\sum_i \left(\tau_{ext}\right)_i = J\dot{\omega} \quad \text{ili} \quad \sum_i \tau_i = 0$$

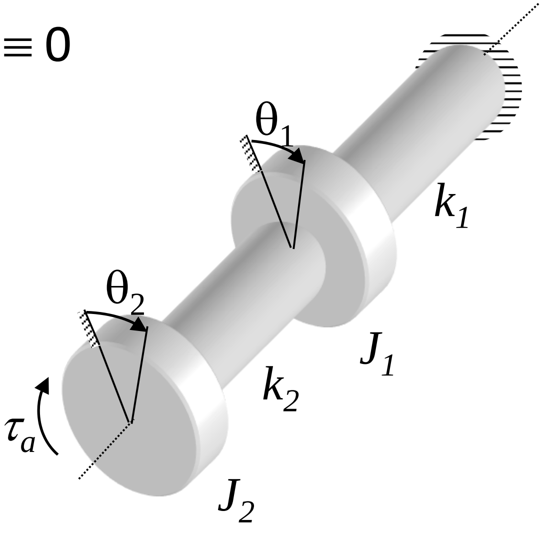
$J\dot{\omega}$ – inercijalni moment sile

2. **Zakon reakcije momentnih sila**
Posmatramo dva tela koja rotiraju oko iste ose. Ako momentom sile jadno telo deluje na drugo onda i drugo telo momentom sile reakcije deluje na prvo telo istom intenzitetom ali suprotnom smerom.

3. **Zakon ugaonih pomeraja**
suma ugaonih pomeraja duž zatvorene putanje $\equiv 0$

$$\sum_{\mathrm{i}} \left(\Delta\theta\right)_{\mathrm{i}} = 0$$

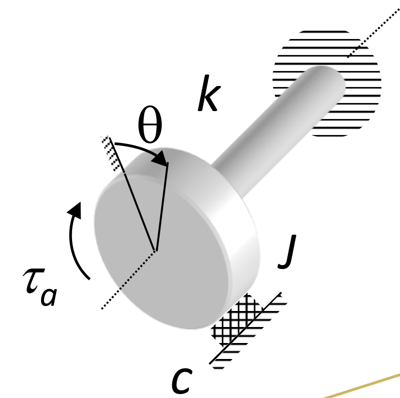
$$\left(\theta_1 - \varnothing\right) + \left(\theta_2 - \theta_1\right) + \left(\varnothing - \theta_2\right) = 0$$

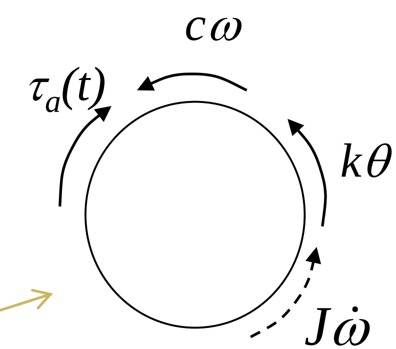


Dobijanja modela sistema

- Naznačimo (usvojimo) pozitivan smer za promenljive
  - smer porasta θ, ω, α nekog tela je isto
- Upotrebom zakona (3) izbegavamo višak simbola potrebnih za opis kretanja
- Za svaku masu ili spojnu tačku (čije je kretanje nepoznato) crtamo dijagram koji pokazuje sve momente sila, uključujući inercijalni moment sile
- sve momente sila, sem pubudnih (ulaznih) izražavamo preko θ, ω, α upotrebom zakona elemenata
- primenjujemo *D`Alambert*-ov zakon na svaki dijagram

- Primer 1:





$$J\dot{\omega} + c\omega + k\theta = \tau_a(t)$$

ili:

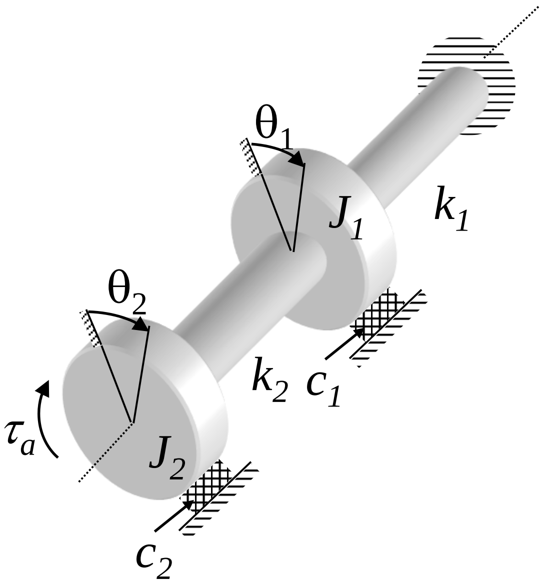
$$\dot{\theta} = \omega$$

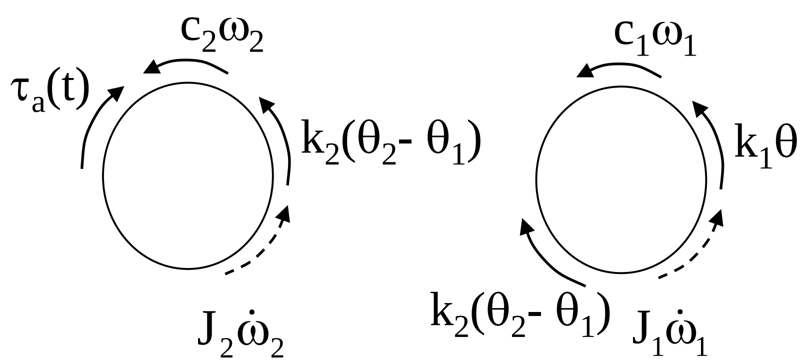
$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}\left[-c\omega - k\theta + \tau_a(t)\right]$$

ili:

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = \tau_a(t)$$

Primer 2





$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k_1\theta_1 - k_2(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 + k_2(\theta_2 - \theta_1) = \tau_a(t)$$

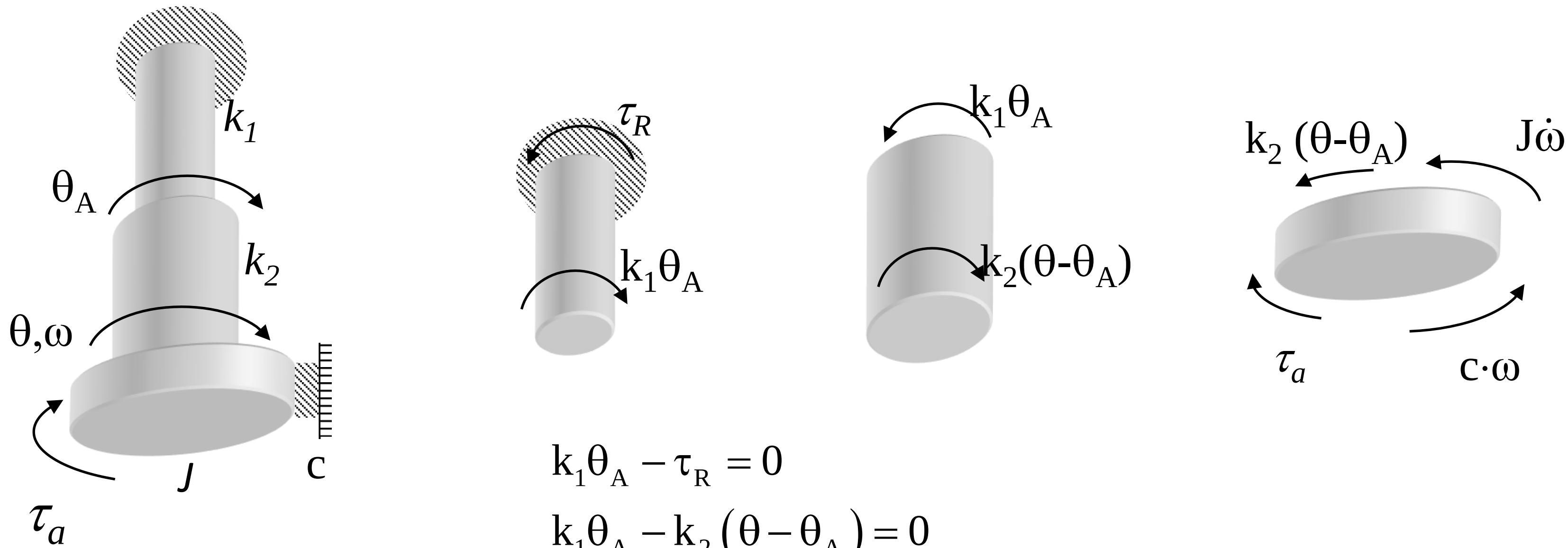
$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1(t)$$

$$\dot{\omega}_1(t) = \frac{1}{J_1}\left(-c_1\omega_1 - (k_1 + k_2)\theta_1 + k_2\theta_2\right)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$$

$$\dot{\omega}_2(t) = \frac{1}{J_2}\left(-c_2\omega_2 - k_2\theta_2 + k_2\theta_1 + \tau_a(t)\right)$$

Primer 3



$$k_1\theta_A - \tau_R = 0$$

$$k_1\theta_A - k_2\left(\theta - \theta_A\right) = 0$$

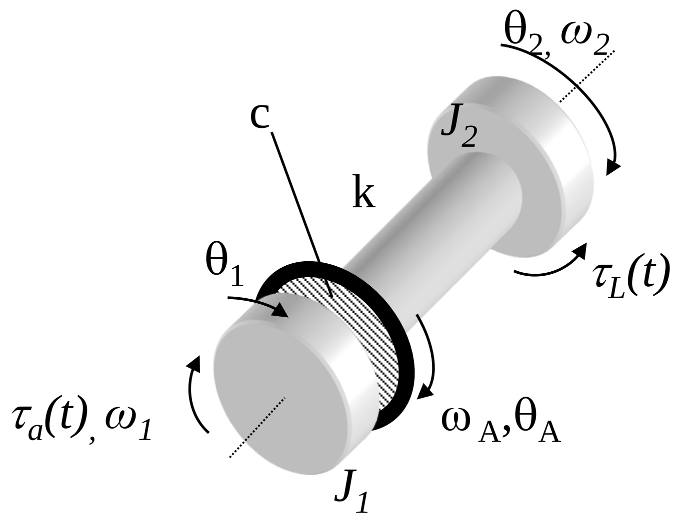
$$J\dot{\omega} + c\omega + k_2(\theta - \theta_A) = \tau_a(t)$$

$$J\dot{\omega} + c\omega + k_{eq}\theta = \tau_a(t)$$

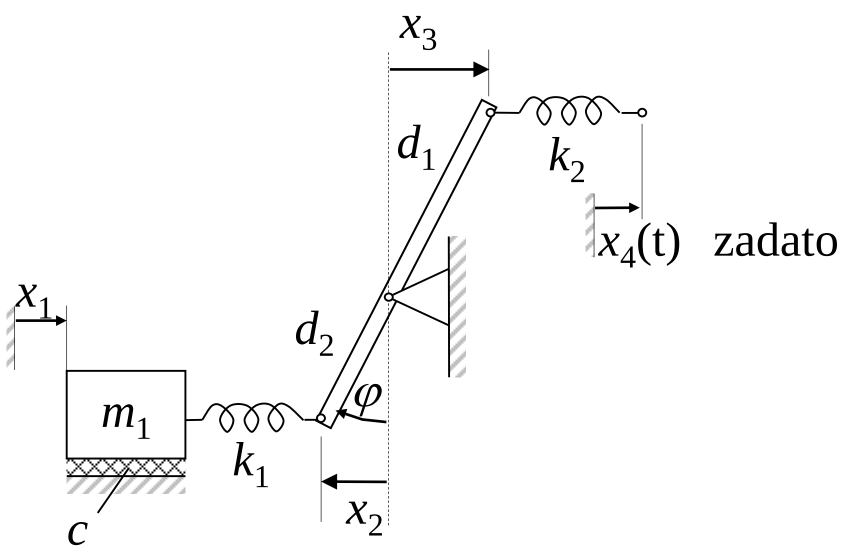
$$k_{eq} = k_2 - \frac{{k_2}^2}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

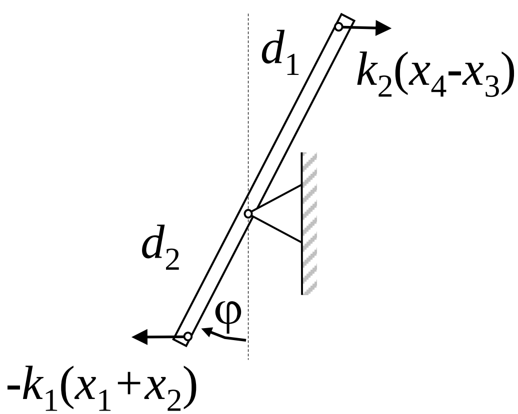
- τ_R-sila reakcije koja deluje na učvršćenje

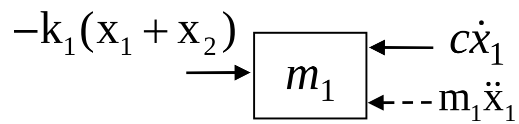
Domaći



Primer 4 – sistem sa polugom





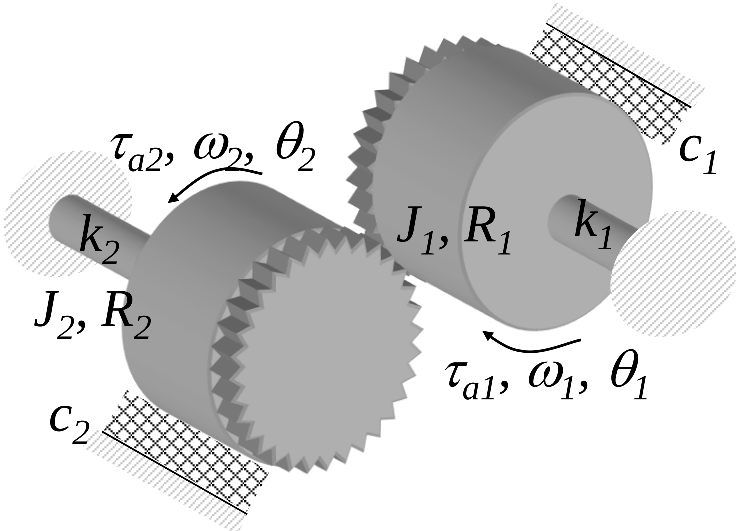


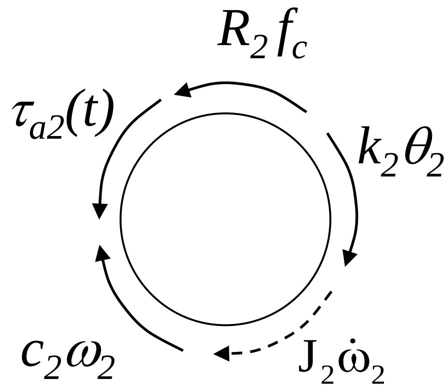
$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k_1(x_1 + x_2) = 0$$

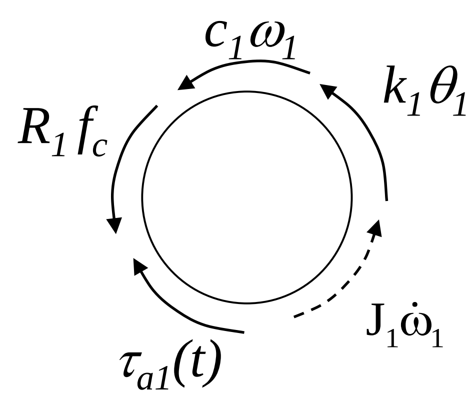
$$d_1 k_2(x_4 - x_3) = d_2 k_1(x_1 + x_2)$$

$$x_3 = \frac{d_1}{d_2} x_2$$

Primer sa zupčanicima







$$J_1\dot{\omega}_1 + c_1\omega_1 + k_1\theta_1 + R_1 f_c = \tau_{a1}(t) \quad \Big/ \cdot N$$

$$J_2\dot{\omega}_2 + c_2\omega_2 + k_2\theta_2 - R_2 f_c = \tau_{a2}(t)$$

$$\theta_1 = N\theta_2$$

$$\omega_1 = N\omega_2$$

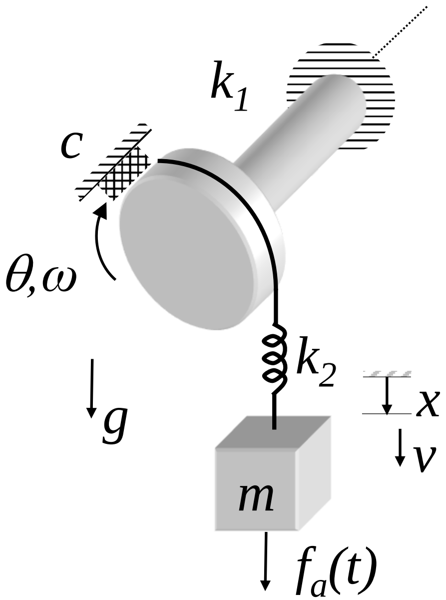
$$J_1 N^2\dot{\omega}_2 + c_1 N^2\omega_2 + k_1 N^2\theta_2 + R_2 f_c = N\tau_{a1}(t)$$

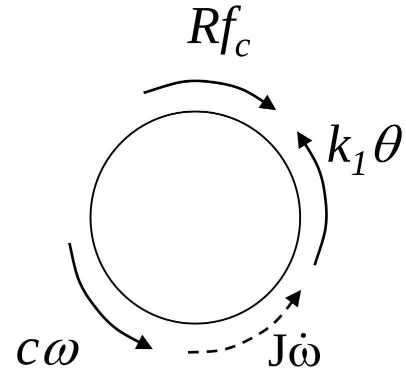
$$J_2\dot{\omega}_2 + c_2\omega_2 + k_2\theta_2 - R_2 f_c = \tau_{a2}(t)$$

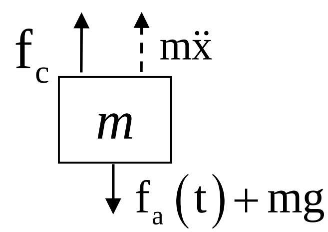
$$(J_2 + N^2 J_1)\dot{\omega}_2 + (c_2 + N^2 c_1)\omega_2 + (k_2 + N^2 k_1)\theta_2 = \tau_{a2}(t) + N\tau_{a1}(t)$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_2 + c_{eq}\omega_2 + k_{eq}\theta_2 = \tau_{a2}(t) + N\tau_{a1}(t)$$

Primer sa kanapom







- Sila u opruzi: $f_c = k_2(x - R\theta)$