Laplasova transformacija. Funkcija prenosa

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Oktobar, 2021.

Cilj ovog dokumenta je upoznavanje sa matematičkim aparatom koji je u literaturi poznat pod nazivom Laplasova transformacija, te sa prednostima ove transformacije i njenom upotrebom u oblasti modelovanja, simulacije i upravljanja sistemima. Jedna od tih upotreba jeste kreiranje funkcije prenosa za matematički opis modela. U prvom delu ovog materijala proći ćemo kroz definiciju i osobine Laplasove i inverzne Laplasove transformacije, dok će drugi deo materijala biti definisanje funkcije prenosa modela.

1. Laplasova transformacija

Uvođenje određenih transformacija nam je često potrebno i koristimo ih svaki put kada imamo mogućnost za to, jer na taj način dolazimo do potrebnih informacija o modelu kroz jedan jednostavniji račun. Pod transformacijom se podrazumeva prelazak iz jedne oblasti matematike u drugu oblast koja nam je jednostavnija za rešavanje. Analiza ponašanja linearnih dinamičkih sistema sa koncentrisanim i vremenski nepromenljivim parametrima se svodi na problem rešavanja odgovarajućeg sistema linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Rešavanje ovih jednačina se pojednostavljuje primenom Laplasove transformacije, tako što se problem rešavanja diferencijalnih jednačina svodi na rešavanje algebarskih jednačina. Laplasova transformacija dobila je ime po francuskom matematičaru Pjeru Laplasu (*Pierre-Simon Laplace,* 1749.-1827.).

1.1 Definicija

Laplasova transformacija (LT) predstavlja integralnu matematičku transformaciju.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

$F(s)$ predstavlja kompleskni lik funkcije $f(t)$, gde je s Laplasova kompleksna promenljiva i važi da je $s = \sigma \pm j\omega$.

Primena je moguća u mnogim oblastima, praktično svugde gde postoje diferencijalne jednačine. Suština ove transformacije jeste prelazak iz vremenskog domena u frekventni, tj. kompleksni domen. U fizici i inženjerstvu se koristi za analizu linearnih, vremenski invarijantnih sistema, ali je takođe je povezana i sa Furijeovom transformacijom.

Postoje funkcije (npr. t^t, e^{t^2}) za koje je nemoguće odrediti Laplasovu transformaciju, ali se takve funkcije retko sreću u teoriji i praksi, tako da njihovo razmatranje nije od posebnog značaja.

1.2 Osobine

1. Teorema linearnosti
   - Homogenost: $\mathcal{L}\{af(t)\} = aF(s)$, gde je a realna konstanta.
   - Aditivnost: $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$.
   - Linearnost: $\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$.
2. Čisto vremensko kašnjenje.
$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s)$$
3. Pomeranje kompleksnog lika.
$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$
4. Konvolucija originala
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$
5. Teorema o izvodu originala
$$\mathcal{L}\Big\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0_-)$$
   gde je $f^{(k-1)}(0_-)$ početna vrednost k-tog izvoda funkcije $f(t)$ u trenutku 0_-.

   Primer: $\mathcal{L}\{\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\} = s^3F(s) - s^2 f(0_-) - sf^{(1)}(0_-) - f^{(2)}(0_-)$
6. Teorema o integralu originala
$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(t)dt\Big\} = \frac{F(s)}{s}$$
   Za n-tostruki integral važi
$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t \dots \int_0^t \int_0^t f(t)d^n t\Big\} = \frac{F(s)}{s^n}$$
$$n = 1, 2, 3, \dots$$

7. Prva granična teorema[1]

$$\mathcal{L}\{\lim_{t\to 0^+} f(t)\} = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

8. Druga granična teorema

$$\mathcal{L}\{\lim_{t\to\infty} f(t)\} = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

1.3 Inverzna Laplasova transformacija

Na osnovu poznatog kompleksnog lika moguće je primenom inverzne Laplasove transformacije odrediti original funkcije u vremenskom domenu na osnovu obrasca:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds \qquad t>0 \tag{1}$$

Funkcije (kompleksni likovi) koje su od posebnog interesa i koje će ovde biti obrađene su date u obliku realnih racionalnih funkcija kompleksne promenljive s, tj. kao razlomak dva polinoma sa realnim koeficijentima:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}$$

Razmatraće se situacija kada je $n \geqslant m$, koja je i najčešća u analizi i sintezi kontilnualnih stacionarnih linearnih sistema sa koncentrisanim parametrima. Koreni polinoma $P(s)$ su nule, a koreni polinoma $Q(s)$ su polovi funkcije $F(s)$.

Za određivanje inverzne Laplasove transformacije su od posebnog značaja polovi funkcije $F(s)$ i tu se mogu uočiti četiri karakteristična slučaja:

1. Svi polovi funkcije $F(s)$ su realni i prosti.
   Potrebno je izvršiti faktorizaciju polinoma $Q(s)$, odnosno rešiti jednačinu $Q(s) = 0$. Rešenja su s_1, s_2, ..., s_n. Sada se može napisati sledeći oblik funkcije $F(s)$:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)}$$

   Dalje se $F(s)$ razvija na parcijalne razlomke:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + ... + \frac{K_n}{s-s_n}$$

   Koeficijeti se izračunavaju prema izrazu:

$$\boxed{K_k = \left[(s-s_k)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_k}} \qquad k = 1, 2, ..., n$$

   Nakon određivanja koeficijenata[2] moguće je odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije $F(s)$ kao:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \sum_{k=1}^{n} K_k e^{s_k t}$$

[1] Važi uz uslov da ne postoji impuls u koordinatnom početku.

[2] Koristeći tabličnu Laplasovu transformaciju $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$.

2. Postoje konjugovano kompleskni polovi, a realni su, ako postoje, prosti.
   Pretpostavka je da jednačina $Q(s) = 0$ ima samo jedan par konjugovano kompleksnih polova (s_1 i $s_2 = s_1^*$), a da su svi ostali (s_3, s_4, ..., s_n) realni i prosti:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{(s-s_1)(s-s_1^*)(s-s_3)...(s-s_n)}$$
$$= \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_1^*}{s-s_1^*} + \frac{K_2}{s-s_2} + ... + \frac{K_n}{s-s_n}$$

   Ako je $s_1 = -\alpha + j\omega$ i $s_1^* = -\alpha - j\omega$, tada je $K_1 = -a + jb$ i $K_1^* = -a - jb$.

$$F(s) = \frac{a+jb}{(s+\alpha)-j\omega} + \frac{a-jb}{(s+\alpha)+j\omega} + \sum_{k=3}^{n} \frac{K_k}{s-s_k} = \frac{2a(s+\alpha) - 2b\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{K_k}{s-s_k}$$

$$F(s) = 2a\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega^2} - 2b\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{K_k}{s-s_k}$$

   Inverzna Laplasova transformacija je:

$$f(t) = 2ae^{-\alpha t}cos(\omega t) - 2be^{-\alpha t}sin(\omega t) + \sum_{k=3}^{n} K_k e^{s_k t}$$

   Koeficijent $K_1 = a + jb$ se izračunava prema obrascu:

$$\boxed{K_k = a + jb = \left[(s+\alpha-j\omega)\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=-\alpha+j\omega}}$$

3. Funckija $F(s)$ ima višestruke realne korene.
   Pretpostavka je da jednačina $Q(s) = 0$ ima višestruko (trostruko) rešenje s_1, a da su ostali polovi funkcije $F(s)$ realni i prosti.

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{(s-s_1)^3(s-s_4)...(s-s_n)}$$

   Dalje se $F(s)$ razvija u parcijalne razlomke:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_{11}}{(s-s_1)^3} + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^2} + \frac{K_{13}}{(s-s_1)} + \frac{K_4}{(s-s_4)} + ... + \frac{K_n}{(s-s_n)}$$

   Koeficijenti se izračunavaju prema izrazu:

$$K_{11} = \left[(s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right]_{s=s_1}$$
$$K_{12} = \left[\frac{d}{ds}\left((s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_1}$$
$$K_{13} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left((s-s_1)^3\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_1}$$

   Opšti obrazac za koeficijente K_{rm}, $m = 1, 2, ..., p$ višestrukog pola $s = s_r$, višestrukosti p jeste:

$$\boxed{K_{rm} = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left((s-s_r)^p\frac{P(s)}{Q(s)}\right)\right]_{s=s_r}}$$

Inverzna Laplasova tranformacija polazne funkcije je:

$$f(t) = \frac{1}{2}K_{11}t^2 s^{s_1 t} + K_{12}te^{s_1 t} + K_{13}e^{s_1 t} + \sum_{i=4}^{n} K_i e^{s_i t}$$

4. Funkcija $F(s)$ ima višestruke konjugovano kompleksne polove.
   Ovaj slučaj se rešava primenom konvolucije.

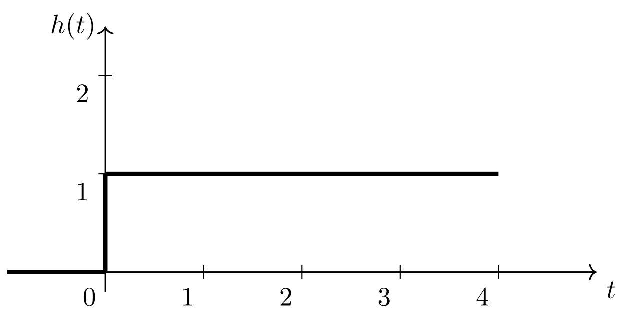
Univerzalni način rešavanja za sva četiri slučaja jeste klasični razvoj funkcije $F(s)$ na sumu parcijalnih razlomaka i određivanje koeficijenata rešavanjem sistema algebarskih jednačina. Za neke slučajeve ovaj pristup je, u stvari, i jednostavniji od predstavljenog.

1.4 Laplasova transformacija funkcija (signala)

Na početku ćemo dati definicije karakterističnih signala i izvođenje njihovih kompleksnih likova.

1. Hevisajdov signal

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$$



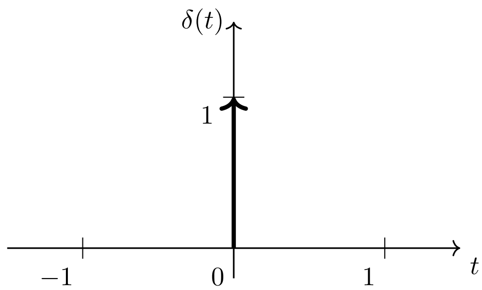
Slika 1: Jedinični odskočni signal.

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^t f(t)e^{-st}dt = \int_0^t 1e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

2. Dirakov (delta) impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

pri čemu važi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$

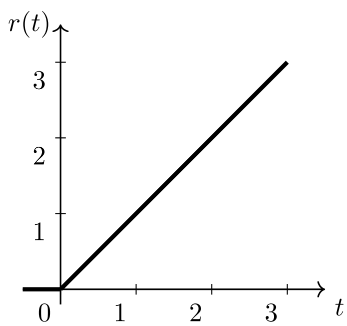


Slika 2: Jedinični impulsni signal.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{h(t) - h(0_-)\} = s\frac{1}{s} = 1$$

3. Nagibni (rampa) signal

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geqslant 0 \end{cases} \iff r(t) = th(t)$$

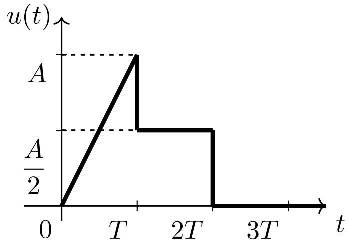


Slika 3: Nagibni (rampa) signal.

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int\limits_0^\infty r(t)e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty te^{-st}dt = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

Polazni integral je rešen smenom: $\int udv = uv - \int vdu$, gde je usvojeno: $u = t$, $dv = e^{-st}dt$, odnosno $du = dt$ i $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

Ovi signali se često sreću u oblasti analize modela, ali pored toga, njihovom kombinacijom moguće je opisati složenije signale. Kao primer, posmatraćemo signal na slici 4.

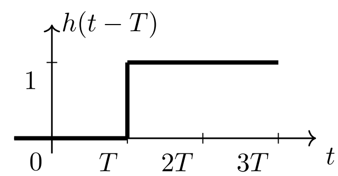


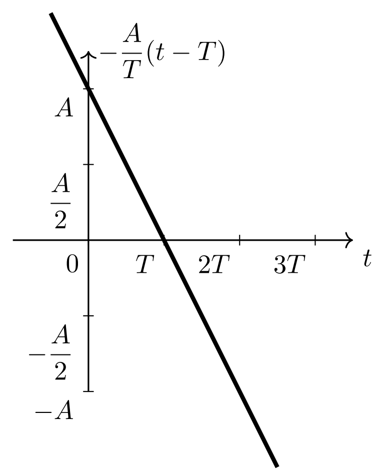
Slika 4: Složeni signal.

Karakteristične signale koje možemo da uočimo u ovom signalu su rampa signal na intervalu od 0 do T, te od T do $2T$ je Hevisajd, a od $2T$ dalje je vrednost 0.

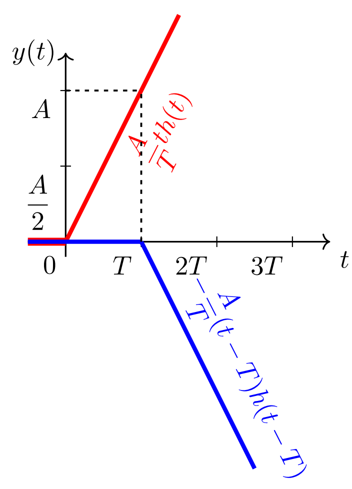
Na intervalu od 0 do T nalazi se rampa signal čiji je koeficijent pravca $\frac{A}{T}t$. Da bi dobili deo signala na intervalu $[T, 2T]$, potrebno je sabrati ovaj rampa signal sa rampa signalom istog koeficijenta pravca, ali sa negativnim predznakom i pomerenim u desno za T. Dodatno moramo obezbediti da dodavanjem drugog rampa signala na prvi ne utičemo na vrednost signala na intervalu od $[0, T]$. To ćemo obezbediti množenjem druge rampe sa Hevisajd signalom koji će biti pomeren za vrednost T.

Pojašnjenje zašto se signali množe sa Hevisajdom:



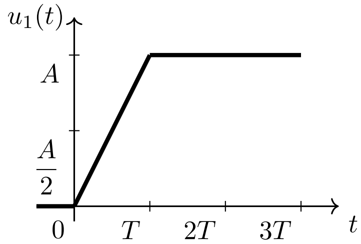


Množenjem ova dva signala, rezultat je signal označen plavom bojom na slici 5. Pomerenim Hevisajdom za T u desno obezbeđujemo da se sve pre T množi sa nula, a od T desno množi se sa 1, tj. ostaje nepromenjeno.



Slika 5: Određivanje signala na intervalu $[0, T]$.

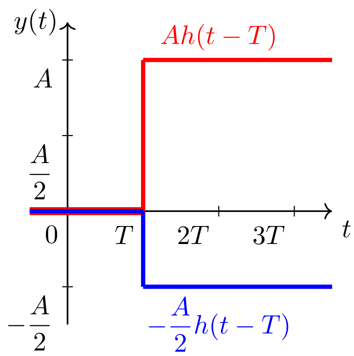
Ukoliko sada $u_1(t)$ izračunamo kao $u_1(t) = \frac{A}{T}th(t) - \frac{A}{T}(t-T)h(t-T)$, tj. ukoliko saberemo dva naznačena signala, dobićemo rezultat prikazan na slici 6.



Slika 6: Rezultat sabiranja dva rampa signala.

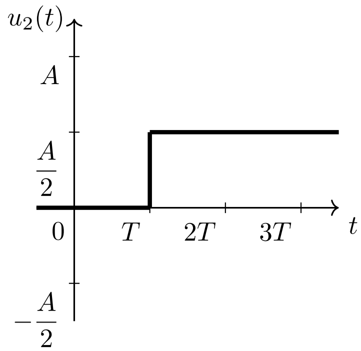
Vidimo da je na intervalu od T vrednost konstanta A.[3] U nastavku, potrebno je opisati signal na intervalu $[T, 2T]$ koji je takođe konstanta vrednosti $\frac{A}{2}$. To ćemo odrediti tako što ćemo od signala na intervalu od T dodati Hevisajd amplitude $-\frac{A}{2}$. Slika 7 ilustruje ovaj deo rešenja.

[3] Hevisajd amplitude A.



Slika 7: Određivanje signala na intervalu $[T, 2T]$.

Rezutlat sabiranja $u_2(t) = Ah(t-T) - \frac{A}{2}h(t-T) = \frac{A}{2}h(t-T)$ prikazan je na slici 8.

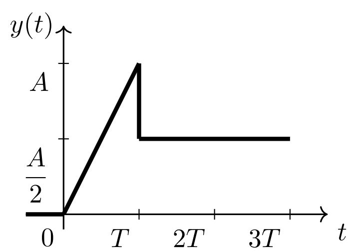


Slika 8: Rezultat sabiranja dva Hevisajd signala.

Kombinovanjem signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$, možemo opisati signal $y(t)$ kao:

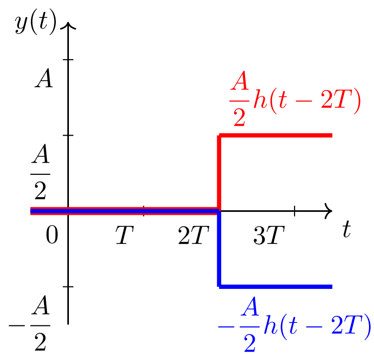
$$y(t) = \frac{A}{T}th(t) - \frac{A}{T}(t-T)h(t-T) - \frac{A}{2}h(t-T)$$

što je ilustrovano na slici 9.



Slika 9: Kombinovanje signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$.

Uočavamo da smo blizu konačnog rešenja. Deo koji je ostao da se kompletira opis ovog signala je sličan prethodnom koraku. Naime, potrebno je na Hevisajd signal amplitude $\frac{A}{2}$ dodati Hevisajd amplitude $-\frac{A}{2}$ u trenutku $2T$ kako bi dostigli nulu kao željenu vrednost. Slika 10 ilustruje ovaj slučaj.



Slika 10: Određivanje signala na intervalu većem od $2T$.

Sa grafika je očigledno da će rezultat sabiranja ova dva signala biti vrednost 0. Konačno, kombinacija poslednjeg koraka sa signalima $u_1(t)$ i $u_2(t)$ daje traženi signal sa slike 4. Jednačina tog signala je:

$$\boxed{u(t) = \frac{A}{T}th(t) - \frac{A}{T}(t-T)h(t-T) - \frac{A}{2}h(t-T) - \frac{A}{2}h(t-2T)}$$

Sada možemo odrediti Laplasovu transformaciju signala $u(t)$.

$$\boxed{U(s) = \frac{A}{T}\frac{1}{s^2}(1-e^{-sT}) - \frac{A}{2}\frac{1}{s}(e^{-sT} - e^{-s2T})}$$

1.5 Primeri sa rešenjima

Primer 1. Odrediti Laplasovu transformaciju sledeće diferencijalne jednačine:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$

Rešenje:
Primenjujemo Laplasovu transformaciju na postavljenu diferencijalnu jednačinu i primenom osobine izvoda funkcije dolazimo do traženog rešenja. U ovom slučaju, svi početni uslovi su nula, tako da nam to pojednostavljuje račun.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2h(t) \quad /\mathcal{L}$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + 3\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = 2\mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$s^2Y(s) - sy^{(0)}(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - y^{(0)}(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$(s^3 + 3s^2 + 2s)Y(s) = 2$$

Oznakama (0) i (1) u eksponentu predstavljeni su nulti i prvi izvod funkcije respektivno, tj.
$\dot{y}(0) = y^{(1)}(0) = 0$
$y(0) = y^{(0)}(0) = 0$

$$\boxed{Y(s) = \frac{2}{(s^3 + 3s^2 + 2s)}}$$

Primer 2. Odrediti rešenje diferencijalne jednačine $y(t)$, ako je $u(t) = \delta(t)$.

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t)$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$

Rešenje:
U ovom primeru, početnu uslovi su takođe nula, dok je $u(t)$ zadato kao Dirakov impuls $\delta(t)$. Ranije smo izveli da je Laplasova transformacija Dirakovog impulsa vrednost 1, tj. $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ što nam je potrebno za ovaj zadatak.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t) \quad /\mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = U(s)$$
$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = 1$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$
$$\frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \quad /(s+3)(s+2)$$
$$1 = A(s+3) + B(s+2) = (A+B)s + 3A + 2B$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3A + 2B &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \qquad \boxed{A = 1} \qquad \boxed{B = -1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$
$$\boxed{y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})h(t)}$$

Primer 3. Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju izraza $F(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2(s+2)}$

Rešenje:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

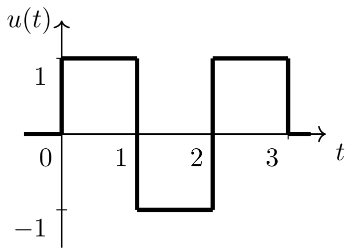
$$
\begin{aligned}
2 &= A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2 \\
2 &= A(s^2+3s+2) + Bs + 2B + C(s^2+2s+1) \\
2 &= (A+C)s^2 + (3A+B+2C)s + 2A + 2B + C
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
3A + B + C &= 0 \\
2A + 2B + C &= 2
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \boxed{A = -2} \quad \boxed{B = 2} \quad \boxed{C = 2}
$$

$$
F(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+2}
$$

$$
\boxed{f(t) = (-2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-2t})h(t)}
$$

Primer 4. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.

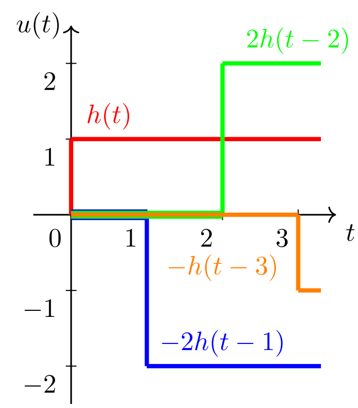


Slika 11: Signal $u(t)$ - Primer 4.

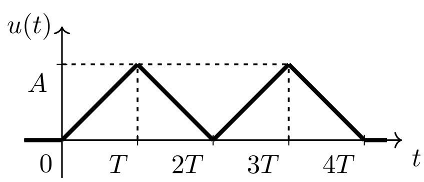
Rešenje:
U ovom primeru možemo da vidimo da su prisutni samo Hevisajd signali, tako da njihovom kombinacijom možemo do kraja opisati traženi signal.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= h(t) - 2h(t-1) + 2h(t-2) - h(t-3) \\
U(s) &= \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + 2e^{-2s} - e^{-3s})
\end{aligned}
$$

Pomoć za primer 4.



Primer 5. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.

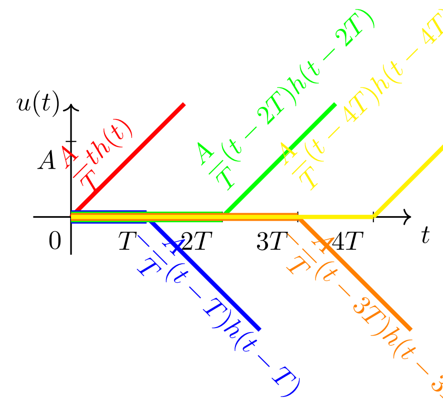


Slika 12: Signal $u(t)$ - Primer 5.

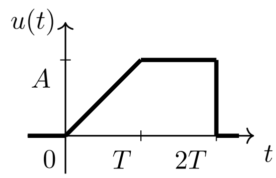
Rešenje:

$$u(t) = \frac{A}{T}\Big[th(t) - 2(t-T)h(t-T) + 2(t-2T)h(t-2T)$$
$$- 2(t-3T)h(t-3T) + (t-4T)h(t-4T)\Big]$$
$$U(s) = \frac{A}{T}\frac{1}{s^2}(1 - 2e^{-sT} + 2e^{-s2T} - 2e^{-s3T} + e^{-s4T})$$

Pomoć za primer 5.



Primer 6. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.



Slika 13: Signal $u(t)$ - Primer 6.

Rešenje:

$$u(t) = \frac{A}{T}th(t) - \frac{A}{T}(t-T)h(t-T) - Ah(t-2T)$$
$$U(s) = \frac{A}{T}\frac{1}{s^2}(1 - e^{-sT}) - A\frac{1}{s}e^{-s2T}$$

1.6 Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Odrediti Laplasovu transformaciju izraza $f(t) = (t-1)e^{-(t-1)}$

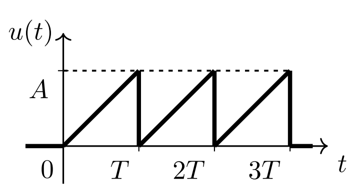
Zadatak 2. Odrediti Laplasovu transformaciju izraza ako je $u(t) = h(t)$

$$\ddot{y} + 13\dot{y} + 36y = u(t)$$
$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$

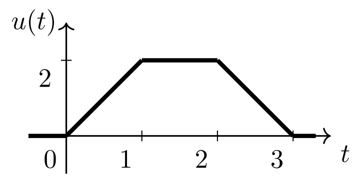
Zadatak 3. Odrediti inverznu Lapalasovu transformaciju izraza

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{4}(s-25)}{s(s^2+10s+25)}$$

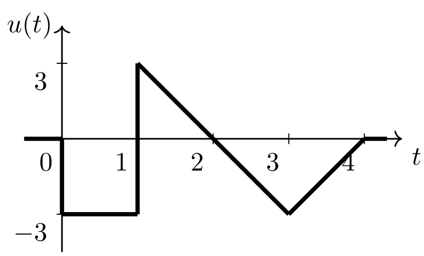
Zadatak 4. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.



Zadatak 5. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.



Zadatak 6. Za signal sa slike odrediti $u(t)$ i $U(s)$.



2. Funkcija prenosa

Funkcija prenosa je još jedan od načina za matematički opis ponašanja linearnih sistema. Najčešća upotreba funkcije prenosa sreće se u teoriji modelovanja, automatskog upravljanja, kao i komunikaciji i digitalnoj obradi signala. Do sada smo se sretali sa modelima predstavljenim u vremenskom domenu, gde nam je veoma važan linearni matematički model u prostoru stanja, dok je ekvivalent tome u kompleksnom domenu upravo funkcija prenosa. Za definisanje funkcije prenosa, neophodna nam je Laplasova transformacija.

Posmatra se obična linearna diferencijalna jednačina n-tog reda modela sa jednim ulazom i jednim izlazom:

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) \\ &= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + ... + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \end{aligned} \qquad n \geqslant m$$

Primenom Laplasove transformacije, za nulte početne uslove, dobija se:

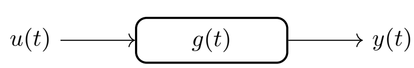
$$\begin{aligned} &s^nY(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + ... + a_2s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) \\ &= b_ms^mU(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + ... + b_1sU(s) + b_0U(s) \end{aligned}$$

Funkcija prenosa dobija se kao količnik izlaza i ulaza:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{1}$$

Opisano rečima, **funkcija prenosa predstavlja odnos kompleksnih likova izlaza i ulaza modela** (slika 14) **za nulte početne uslove**.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} \tag{2}$$

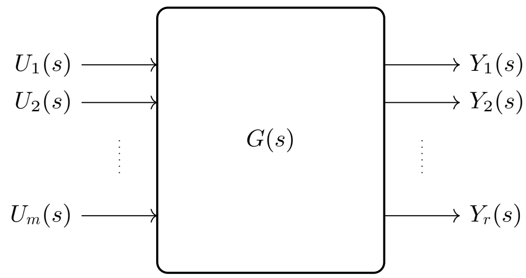


Slika 14: Sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom.

Kao što se može videti iz (1) i (2), funkcija prenosa daje vezu između jednog izlaza i jednog ulaza, ali ne pruža nikakvu informaciju o unutrašnjoj strukturi i ponašanju sistema. U situaciji kada treba da odredimo funkciju prenosa multivarijabilnog sistema[1] sa m ulaza i r izlaza, prikazan na slici 15, potrebno je odrediti odnose svih kombinacija izlaza i ulaza, tako da na taj način određujemo matricu funkcija prenosa. Pod pretpostavkom da je ovaj sistem linearan, onda važi teorema superpozicije, a to znači da je odziv linearnog sistema na složenu pobudu jednak sumi odziva na svaku prostu pobudu pojedinačno i da za k-ti izlaz važi:

$$\begin{gathered} Y_k(s) = G_{k1}(s)U_1(s) + G_{k2}(s)U_2(s) + ... + G_{km}(s)U_m(s) \\ k = 1, 2, ..., r \qquad j = 1, 2, ..., m \end{gathered}$$

[1] Multivarijabilni sistemi su sistemi sa više ulaza i više izlaza.



Slika 15: Multivarijabilni sistem.

Funkcija prenosa multivarijabilnog sistema zapisana u matričnom obliku:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

gde je:

$$G_{kj}(s) = \frac{Y_k(s)}{U_j(s)} \qquad k = 1, 2, ..., r \qquad j = 1, 2, ..., m$$

3. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Odrediti funkciju prenosa sistema opisanog diferencijalnom jednačinom, ukoliko je ulaz $u(t)$, a izlaz $y(t)$. Svi početni uslovi su nula.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = \dot{u} - 2u$$

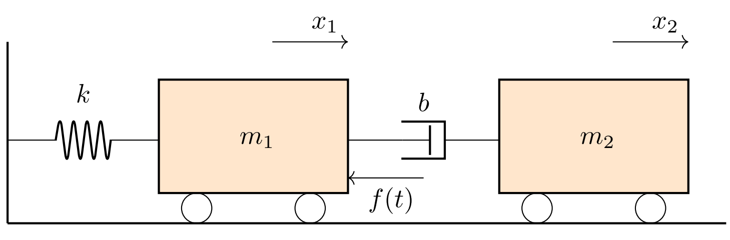
Rešenje:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 2y = \dot{u} - 2u \qquad /\mathcal{L}$$

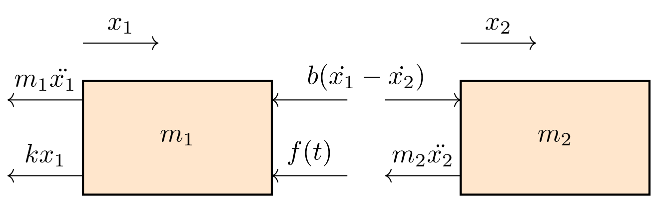
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 2Y(s) = sU(s) - 2U(s)$$
$$(s^2 + 4s + 2)Y(s) = (s - 2)U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s - 2}{s^2 + 4s + 2}}$$

Primer 2. Odrediti funkciju prenosa mehaničkog translatornog sistema sa slike ako je ulaz pobudna sila $f(t)$, a izlaz pozicija $x_2(t)$. Parametri modela su: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $b = 1$, $k = 3$.



Rešenje:



$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 + f(t) = 0 \\
&m_2\ddot{x}_2 - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\
&\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 3x_1 + f(t) = 0 \qquad /\mathcal{L} \\
&2\ddot{x}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \qquad /\mathcal{L}
\end{aligned}
$$

$$s^2X_1(s) + sX_1(s) - sX_2(s) + 3X_1(s) + F(s) = 0 \tag{1}$$

$$2s^2X_2(s) - sX_1(s) + sX_2(s) = 0 \tag{2}$$

Iz jednačine (2) sledi:

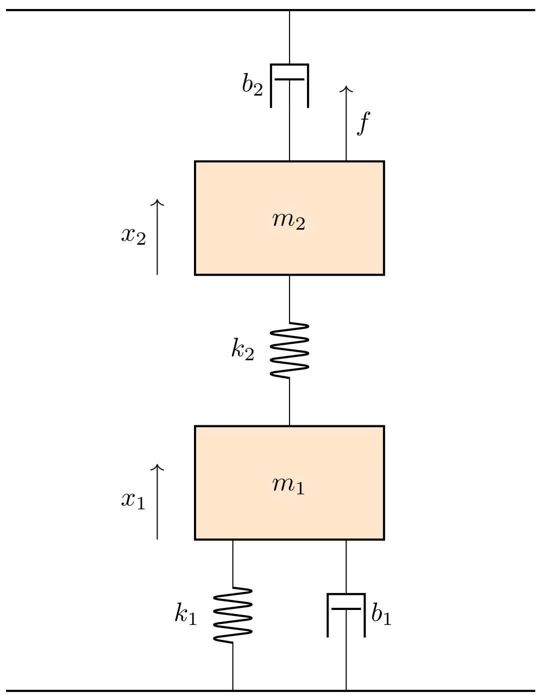
$$
\begin{aligned}
&sX_2(s)(2s+1) = sX_1(s) \\
&X_1(s) = X_2(s)(2s+1)
\end{aligned} \tag{3}
$$

Uvrštavanjem (3) u (1) dobija se:

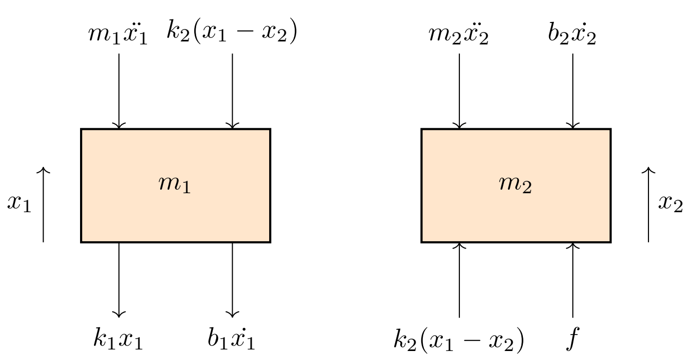
$$
\begin{aligned}
&s^2(2s+1)X_2(s) + s(2s+1)X_2(s) - sX_2(s) + 3(2s+1)X_2(s) = -F(s) \\
&X_2(s)(2s^3 + s^2 + 2s^2 + s - s + 6s + 3) = -F(s) \\
&X_2(s)(2s^3 + 3s^2 + 6s + 3) = -F(s)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{-1}{2s^3 + 3s^2 + 6s + 3} = \frac{-0.5}{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 1.5}}$$

Primer 3. Odrediti funkciju prenosa mehaničkog translatornog sistema sa slike ako je ulaz pobudna sila $f(t)$, a izlaz pozicija $x_2(t)$. Parametri modela su: $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $k_1 = 9$, $k_2 = 16$. Zanemariti gravitaciju.



Rešenje:



$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= 0 \\
m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - k_2(x_1 - x_2) = f(t)
\end{aligned}
$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se:

$$m_1 s^2 X_1(s) + b_1 s X_1(s) + k_1 X_1(s) + k_2 X_1(s) - k_2 X_2(s) = 0 \tag{4}$$
$$m_2 s^2 X_2(s) + b_2 s X_2(s) - k_2 X_1(s) + k_2 X_2(s) = F(s) \tag{5}$$

Iz jednačine (4) sledi:

$$(m_1 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2) X_1(s) = k_2 X_2(s)$$
$$\boxed{X_1(s) = \frac{k_2}{m_1 s^2 + b_1 s + k_1 + k_2} X_2(s)} \tag{6}$$

Uvrštavanjem izraza (6) u izraz (5) dobija se:

$$(m_2 s^2 + b_2 s + k_2) X_2(s) - k_2 X_1(s) = F(s)$$
$$(m_2 s^2 + b_2 s + k_2) X_2(s) - \frac{k_2^2}{m_1 s^2 + s b_1 + k_1 + k_2} X_2(s) = F(s)$$

Uvrštavanjem zadatih vrednosti za parametare dobija se:

$$(s^2 + 8s + 16 - \frac{256}{s^2 + 10s + 25}) X_2(s) = F(s)$$
$$\left((s+4)^2 - \frac{256}{(s+5)^2}\right) X_2(s) = F(s)$$
$$\frac{s^4 + 18s^3 + 121s^2 + 360s + 144}{s^2 + 10s + 25} X_2(s) = F(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 10s + 25}{s^4 + 18s^3 + 121s^2 + 360s + 144}}$$

Primer 4. Ako je ulaz napon $u_1(t)$, a izlaz napon $u_2(t)$, za kolo sa slike odrediti:

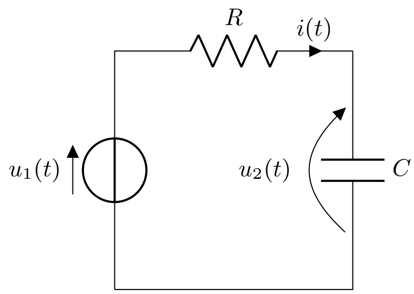
a) funkciju prenosa

b) impulsni odziv[1]

c) odziv na pobudu $Uh(t)$

[1] Impulsni odziv se dobija tako što se na ulaz sistema dovede jedinična impulsna pobuda i odredi izlaz.

Rešenje:



a)

$$Ri(t) + u_2(t) - u_1(t) = 0 \qquad /\mathcal{L}$$
$$RI(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$i(t) = C\frac{du_2(t)}{dt} \qquad /\mathcal{L}$$
$$I(s) = CsU_2(s)$$

$$RCsU_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$
$$U_2(s)(sRC + 1) = U_1(s)$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{RC}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}}$$

b)

$$u_1(t) = \delta(t)$$
$$U_1(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Rightarrow \boxed{U_2(s) = G(s) \cdot U_1(s)}$$

$$U_2(s) = \frac{1}{RC}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \cdot U_1(s)$$

$$U_2(s) = \frac{1}{RC}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \qquad /\mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{u_2(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}h(t)}$$

c)

$$u_1(t) = Uh(t)$$

$$U_1(s) = \mathcal{L}\{Uh(t)\} = U\frac{1}{s}$$

$$U_2(s) = \frac{U}{RC}\frac{1}{s(s+\frac{1}{RC})}$$

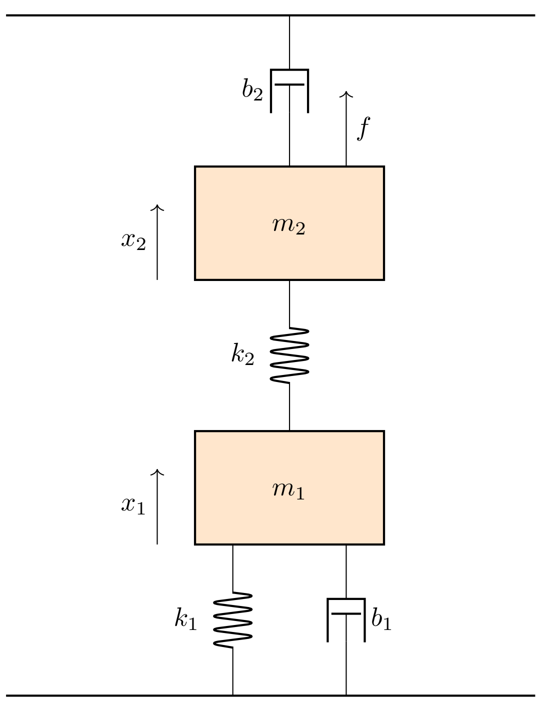
$$U_2(s) = U\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\Big] \qquad /\mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{u_2(t) = U[1 - e^{-\frac{t}{RC}}]h(t)}$$

4. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Odrediti funkciju prenosa $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ sistema opisanog diferencijalnom jednačinom $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 9y = \ddot{u} + 7u$. Početni uslovi su nula.

Zadatak 2. Odrediti funkciju prenosa mehaničkog translatornog sistema sa slike ako je ulaz pobudna sila $f(t)$, a izlaz pozicija $x_1(t)$. Parametri modela su: $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $b_1 = 10$, $b_2 = 8$, $k_1 = 9$, $k_2 = 16$. Zanemariti gravitaciju.



Zadatak 3. Za sistem opisan funkcijom prenosa $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s-2}{s^2+5s+6}$ odrediti:

a) impulsni odziv

b) odskočni odziv

c) odziv na pobudu $h(t-2)$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.