Linearizacija

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Novembar, 2021.

Cilj ovog dokumenta je upoznati se sa koracima linearizacije nelinearnih modela i primeniti ih na konkretne probleme.

1. Uvod

Postupak linearizacije podrazumeva postupak dobijanja linearnog modela u okolini radne tačke na osnovu polaznog nelinearnog sistema.
Koraci linearizacije su:

1. Odrediti radnu tačku pisanjem i rešavanjem odgovarajućih algebarskih jednačina
2. Prepisati sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti
3. Zameniti sve nelinearne članove sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red
4. Skratiti konstantne članove u diferencijalnim jednačinama. (Upotrebiti algebarske jednačine koje određuju radnu tačku)
5. Definisati početene vrednosti inkrementalnih promenljivih $\hat{x}(0) = x(0) - \overline{x}$

Linearizaciju je moguće izvršiti i primenom obrasca (1) koji je izveden na osnovu prethodno opisanih koraka. Ako posmatramo matematički model nelinearnog sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

nakon određivanja radne tačke sistema, linearizacija nelinearnog modela u okollini radne tačke $(\overline{x}, \overline{u})$ može da se odredi po obrascu:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x} + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{u} \\ \hat{y} &= \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{x} + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\overline{x},\overline{u}} \hat{u} \end{aligned} \tag{1}$$

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 0$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + 2x - 3 + u \\ y &= x \end{aligned}$$

Rešenje:
a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

   $$\dot{x} = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -3$$

   odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u})$ i $(\overline{x}_2, \overline{u})$, tj. $(1, 0)$ i $(-3, 0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

   $$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \hat{x} \\ y &= \overline{y} + \hat{y} \\ u &= \overline{u} + \hat{u} \end{aligned}$$

   Dobijamo jednačine:

   $$\begin{aligned} (\overline{x} \dot{+} \hat{x}) &= x^2 + 2(\overline{x} + \hat{x}) - 3 + \overline{u} + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x} + \hat{x} \end{aligned} \tag{1}$$

   gde je $(\overline{x} \dot{+} \hat{x}) = \dot{\hat{x}}$ jer je $\overline{x}$ konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red:

   $$F(x) = x^2$$

   $$F(\overline{x} + \hat{x}) = F(\overline{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \hat{x} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x}$$

   Uvrštavanjem u (1) dobija se:

   $$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

4. Određujemo linearne modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:
   Pošto je $y = x$, odatle sledi da je $\overline{y} = \overline{x}$, tako da se dobija:

   $$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x} \end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 1 + 2\hat{x} + 2 + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Konstantni članovi se pokrate i konačno dobijamo linearan model u okolini radne tačke $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (-3, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):
Radne tačke su određene u prvom delu zadatka ($(1, 0)$ i $(-3, 0)$), tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. $\dot{\hat{x}}$ i $\hat{y}$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (2x + 2)\Big|_{\overline{x}, \overline{u}} \hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (-3, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Primer 2. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 0$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x - 1)(x - 3) + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 4x + 3 + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

$$\dot{x} = 0 \implies (x-1)(x-3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

   odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u})$ i $(\overline{x}_2, \overline{u})$, tj. $(1,0)$ i $(3,0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \hat{x} \\ y &= \overline{y} + \hat{y} \\ u &= \overline{u} + \hat{u} \end{aligned}$$

   Dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= x^2 - 4(\overline{x} + \hat{x}) + 3 + \overline{u} + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= x^2 \end{aligned} \tag{2}$$

   gde je $\dot{\hat{x}} = (\overline{x} \dot{+} \hat{x})$ jer je $\overline{x}$ konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red:

$$F(x) = x^2$$

$$F(\overline{x} + \hat{x}) = F(\overline{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \hat{x} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x}$$

   Uvrštavanjem u (2) dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} - 4\overline{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \overline{y} + \hat{y} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} \end{aligned}$$

4. Određujemo linearane modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:
   Pošto je $y = x^2$, onda je i $\overline{y} = \overline{x}^2$, tako da se dobija da je $\hat{y} = 2\overline{x}\hat{x}$.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} - 4\overline{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\overline{x}\hat{x} \end{aligned}$$

   Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1,0)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= -2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\hat{x} \end{aligned}$$

   Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (3,0)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= 2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 6\hat{x} \end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):
Radne tačke su određene u prvom delu zadatka ((1, 0) i (3, 0)), tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. $\dot{\hat{x}}$ i $\hat{y}$:

$$\dot{\hat{x}} = (2x-4)\Big|_{\overline{x},\overline{u}}\hat{x} + \hat{u}$$

$$\hat{y} = 2x\Big|_{\overline{x},\overline{u}}\hat{x}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$:

$$\dot{\hat{x}} = -2\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = 2\hat{x}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (3, 0)$:

$$\dot{\hat{x}} = 2\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = 6\hat{x}$$

3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\dot{x} = x^2 - 3x + 2 + x(1-u)$$
$$y = 2x^2 + 3x$$

Zadatak 2. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\dot{x} = \frac{x-5}{1+x^2} + 5u$$
$$y = x$$

Zadatak 3. Za dati nelinearani sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\overline{u} = 1$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\dot{x} - 2sin(2x) = u$$
$$y = 2x^2 + 3x$$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.